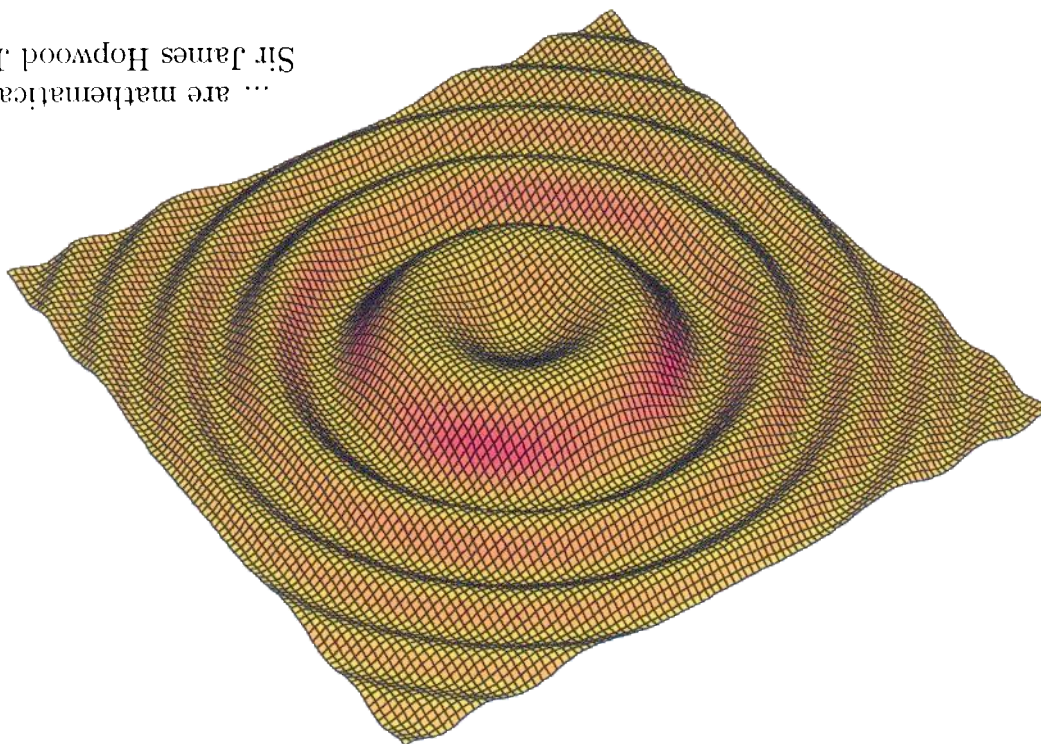


All the pictures that science
now draws of nature ...

Matemáticas con DERIVE 5

Francisco J. Cabo García y Bonifacio Llamazares Rodríguez

... are mathematical pictures.
Sir James Hopwood Jeans (1930)

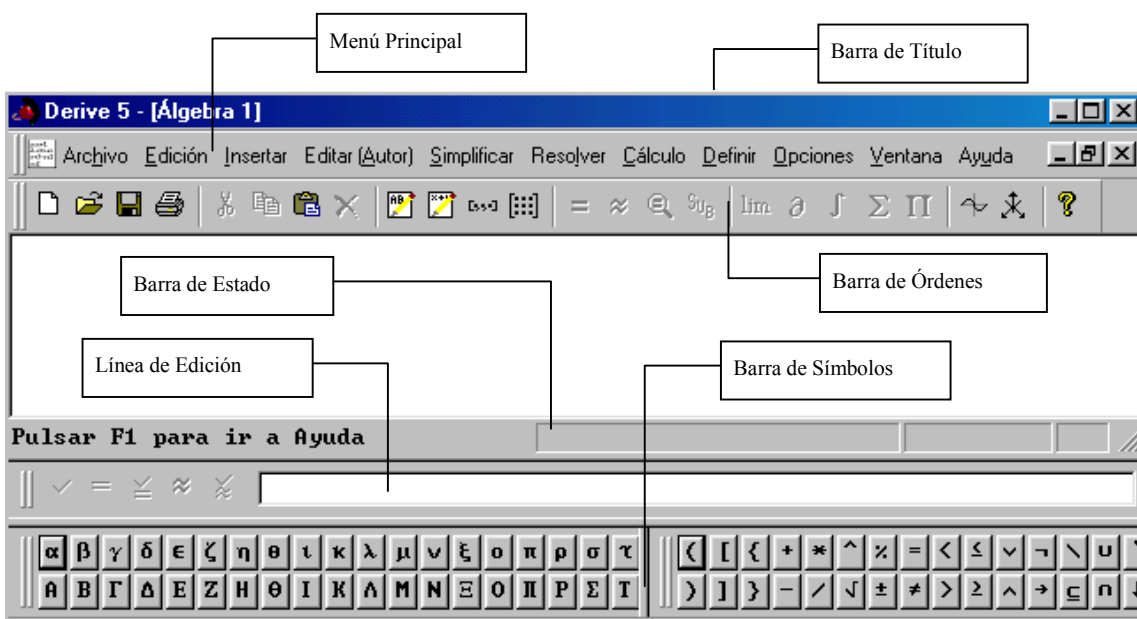


1 El programa DERIVE 5

1.1 Introducción

DERIVE es un paquete de software con capacidad para desarrollar cálculo simbólico, análisis gráfico y manipulación numérica. Se trata de un programa que se ejecuta en el entorno Windows y que, por lo tanto, presenta las características habituales que tienen dichas aplicaciones.

Al ejecutar el programa aparece la siguiente ventana:



Para realizar las distintas operaciones con el programa DERIVE se puede hacer uso, bien de los botones de la barra de órdenes, o bien del menú principal que aparece en la parte superior de la pantalla (sólo se podrá trabajar con las opciones y botones que no estén “apagados”). Trabajar con los botones es habitualmente más rápido, pero no contempla todas las posibilidades del programa. Al situar el puntero del ratón sobre cualquier botón, aparece una pequeña ventana que muestra su función. Dicha función también se describe en la barra de estado.

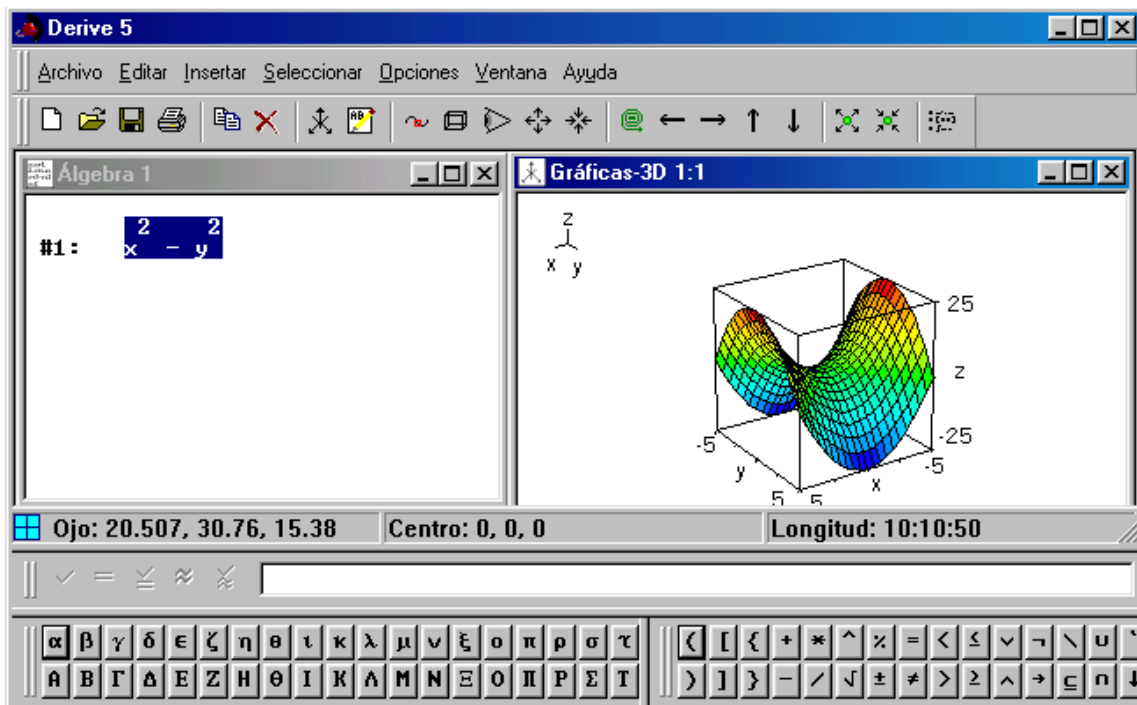
Las opciones del programa se distribuyen en forma de árbol, de modo que cuando se selecciona una de ellas se despliega un menú en el que aparecen nuevas opciones. La forma más sencilla de utilizar los menús es a través del ratón. No obstante, también se puede trabajar por medio del teclado (lo cual puede resultar más cómodo y rápido cuando se tiene suficiente soltura). Para desplegar un menú del menú principal, basta con presionar **Alt** + **letra subrayada en opción**. Una vez desplegado el menú se puede seleccionar una opción presionando la letra que aparece subrayada. Además, algunas opciones pueden ser directamente ejecutadas con la combinación de teclas que aparece a su derecha.

Cuando trabajemos a través de menús, lo expresaremos por la secuencia de opciones, por ejemplo: *Arch*ivo → *A*brir significa que se elige la opción *A*brir dentro del menú *Arch*ivo.

El programa DERIVE tiene tres tipos distintos de ventanas:

1. La Ventana de Álgebra, es la que aparece al iniciar el programa y se utiliza para trabajar con expresiones simbólicas o numéricas.
2. La Ventana de Gráficas 2D, se utiliza para dibujar una o varias gráficas en dos dimensiones.
3. La Ventana de Gráficas 3D, permite representar una o varias gráficas en tres dimensiones.

El programa, como cualquier otra aplicación Windows, permite tener abiertas varias de estas ventanas, siendo “la ventana activa” aquella cuya barra de título esté “encendida”.



Una de las ventajas de DERIVE es que permite crear nuevas utilidades a partir de las ya existentes, pudiéndose guardar en ficheros de extensión .MTH. Estos comandos tienen que ser cargados en la memoria del ordenador antes de ser utilizados por primera vez en un documento de trabajo.

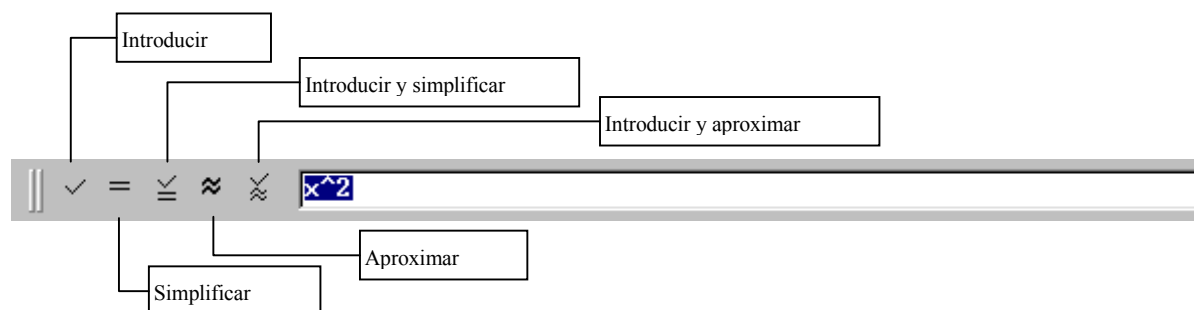
El programa DERIVE ofrece una ayuda tan completa como fácil de usar, ¡UTILÍZALA!

1.2 Operadores fundamentales

Teclado	Ratón	Definición
$a + b$	$\pm a$	más y menos a .
$a - b$	$a + b$	a más b .
$a * b \Leftrightarrow ab$	$a - b$	a menos b .
a/b	$a * b$	a por b .
a^b	a/b	a partido por b .
$\text{sqrt}(a) \Leftrightarrow \boxed{\text{Ctrl+q}} a$	a^b	a elevado b .
$a!$	\sqrt{a}	raíz cuadrada de a .
$a/ = b$		factorial de a .
$a < = b$	$a \neq b$	a es distinto de b .
$a > = b$	$a \leq b$	a es menor o igual que b .
inf	$a \geq b$	a es mayor o igual que b .
$\#e \Leftrightarrow \boxed{\text{Ctrl+e}}$	∞	infinito.
$\#i \Leftrightarrow \boxed{\text{Ctrl+i}}$	\hat{e}	base e de los \ln ($\ln(\hat{e}) = 1$).
pi $\Leftrightarrow \boxed{\text{Ctrl+p}}$	\hat{i}	unidad imaginaria, raíz cuadrada de -1 .
$\#e^a \Leftrightarrow \exp(a) \Leftrightarrow \boxed{\text{Ctrl+e}}^a$	$\pi = 3.1416$	área del círculo de radio unidad.
$\ln(a) \Leftrightarrow \log(a)$		e elevado a a .
$a \boxed{\text{Ctrl+o}}$	$a \circ$	logaritmo neperiano de a .
$a \boxed{\text{Ctrl+b}} 1, a \text{ sub } 1$	$a \circ$	a grados = $a \cdot \pi/180$ radianes.
$p \text{ and } q$	$a \downarrow 1$	subíndice para vectores y matrices, a_1 .
$p \text{ or } q$	$\neg q$	“no” q .
$p \text{ imp } q$	$p \wedge q$	p “y” q .
$s \boxed{\text{Ctrl+t}}$	$p \vee q$	p “o” q .
$s \boxed{\text{Ctrl+u}} t$		p implica q .
$s \boxed{\text{Ctrl+n}} t$	s^c	complementario de s .
$s \setminus t$	$s \cup t$	unión de s y t .
	$s \cap t$	intersección de s y t .
		diferencia entre los conjuntos s y t .

1.3 Edición con DERIVE

Para introducir expresiones en la Ventana de Álgebra es necesario utilizar la línea de edición que se muestra a continuación.



Una vez escrita la expresión, es necesario pulsar la tecla $\boxed{\leftarrow}$ (Enter) o hacer clic en el botón \checkmark para que aparezca en la Ventana de Álgebra. El resto de los botones de la línea de edición permiten, bien obtener el resultado de la expresión, ya sea en forma algebraica $\boxed{=}$ ó numérica $\boxed{\approx}$; o bien mostrar tanto la expresión como el resultado de la misma, de nuevo en forma algebraica $\boxed{\cong}$ ó numérica $\boxed{\approx}$. Nótese que una vez introducida la expresión y/o su resultado en la Ventana de Álgebra, la expresión permanece seleccionada en la línea de edición. Como consecuencia, al introducir un nuevo carácter la expresión desaparece. Si el cursor no está en la línea de edición, para situarse en ella es necesario hacer clic con el ratón o pulsar la tecla $\boxed{F2}$. Si el texto de la línea de edición no aparece seleccionado, al escribir un nuevo carácter aparecerá en la posición del cursor sin borrar la expresión. Una forma de seleccionar toda la expresión en la línea de edición es hacer doble clic sobre ella, mientras que es posible seleccionar una parte haciendo clic y arrastrando.

Las expresiones introducidas en la Ventana de Álgebra se van numerando consecutivamente. La que aparece seleccionada es la que denominaremos “expresión activa”. Al ejecutar una opción, ésta actuará sobre dicha expresión (por ejemplo, al ejecutar *Plot* se dibujará la gráfica de la expresión activa). Para seleccionar una expresión distinta de la actual se puede utilizar el ratón o bien el teclado. Haciendo clic con el ratón se selecciona una expresión completa, y sucesivos clics permiten seleccionar subexpresiones de ésta. Utilizando el teclado, las teclas $\boxed{\downarrow}$ y $\boxed{\uparrow}$ permiten seleccionar expresiones completas, mientras que $\boxed{\uparrow} + \boxed{\leftarrow}$, $\boxed{\rightarrow}$, $\boxed{\downarrow}$, $\boxed{\uparrow}$ permiten seleccionar subexpresiones de la expresión activa. Para seleccionar varias expresiones consecutivas es necesario hacer clic a la derecha de la primera (*resp.* última) expresión y arrastrar el ratón hacia abajo (*resp.* hacia arriba).

Una expresión activa se puede recuperar en la línea de edición presionando $\boxed{F3}$ o $\boxed{F4}$ (este último introduce la expresión entre paréntesis). También se puede recuperar una expresión completa escribiendo # seguido del número que corresponde a su línea.

La forma más cómoda de mover una o varias expresiones seleccionadas consiste en hacer clic sobre ellas con el botón derecho del ratón, escoger la opción *Cortar*, hacer clic con el botón derecho del ratón sobre la expresión delante de la cual queremos colocar las expresiones y elegir la opción *Pegar*.

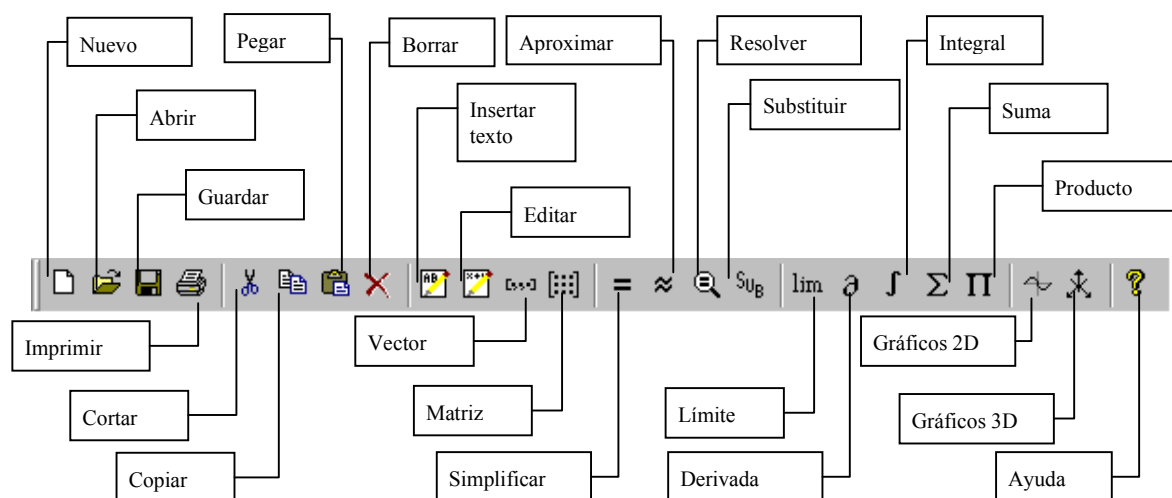
Cuando se trabaja con DERIVE, muchas veces es interesante introducir comentarios aclaratorios. Esto se realiza mediante la opción *Insertar* \rightarrow *Objeto de texto* o con el botón \boxed{AB} .

En algunas ocasiones las operaciones de cálculo pueden requerir mucho tiempo o incluso no ser posibles. Este proceso se puede detener pulsando la tecla **Esc**.

La forma habitual de recuperar un fichero, guardado en una sesión de trabajo anterior en formato .DFW, es mediante la opción *Archivo* → *Abrir* o hacer doble clic sobre el nombre del archivo (en este último caso, no es necesario ejecutar previamente DERIVE).

1.4 Menú de la Ventana de Álgebra

A continuación se muestra la barra de órdenes de la Ventana de Álgebra, la cual permite ejecutar las siguientes opciones:



Seguidamente se muestran todas las posibilidades que aparecen en el menú principal del programa cuando está activa la Ventana de Álgebra:

- *Arch*ivo →

Nuevo



Abre una nueva ventana vacía.

Abrir...



Abre un fichero de trabajo ya existente.

Cerrar

Cierra la ventana activa.

Guardar



Guarda el contenido de la ventana activa en un archivo (por defecto con extensión .DFW).

Guardar como...

Permite elegir el nombre y la ubicación del fichero en el que guardar el contenido de la ventana activa. También permite guardar los valores de configuración de la Ventana de Álgebra.

Leer ►

<u>M</u> th...	Carga un fichero de extensión .MTH en la ventana activa.
<u>D</u> atos...	Carga un fichero ASCII de datos como una matriz, dentro de la ventana activa.
<u>D</u> emo...	Carga un fichero de demostración que muestra paso a paso algunas posibilidades del programa.
<u>U</u> tilidades...	Carga en memoria ficheros de utilidades (sin mostrarlos en pantalla) que contienen nuevos comandos y funciones para que puedan ser utilizados.

Exportar ►

Permite guardar el fichero en formato BASIC, FORTRAN, C o PASCAL.

Configurar la Página...

Permite elegir los márgenes de la página.

Vista Previa

Permite visualizar una presentación preliminar antes de imprimir.

Imprimir...

Permite seleccionar la impresora y sus propiedades, así como el rango que se desea imprimir. El botón imprime directamente sin posibilidad de realizar cambios en las opciones.


Salir

Cierra el programa, ofreciendo la posibilidad de guardar las Ventanas de Álgebra.




• Edición →

<u>O</u> bjeto de <u>D</u> erive...	Edita la expresión activa.
<u>A</u> notación...	Permite introducir un comentario que aparece en la barra de estado cuando la expresión está activa.
<u>V</u> ínculos con objetos <u>O</u> LE...	Modifica los vínculos de un objeto OLE.
<u>O</u> bjeto	Activa un objeto incrustado o vinculado.
<u>B</u> orrar...	Borra los objetos seleccionados (también tecla Supr).
<u>R</u> ecuperar	Recupera las expresiones eliminadas con el último uso del opción <u>B</u> orrar.
<u>S</u> eleccionar <u>T</u> odo	Selecciona todos los objetos de la Ventana de Álgebra activa.
<u>C</u> ortar	Mueve los objetos seleccionados al portapapeles.
<u>C</u> opiar	Copia los objetos seleccionados al portapapeles.
<u>P</u> egar	Inserta los objetos del portapapeles.
<u>M</u> arcar y <u>C</u> opiar...	Copia el área marcada al portapapeles (formato mapa de bits).




• Insertar →

- Gráfica 2D... Inserta una gráfica 2D en la Ventana de Álgebra activa.
- Gráfica 3D... Inserta una gráfica 3D en la Ventana de Álgebra activa.
- Objeto de texto...  Inserta un texto en la Ventana de Álgebra activa.
- Objeto OLE... Inserta un objeto OLE en la Ventana de Álgebra activa.


• Editar (Autor) →

- Expresión...  Es la forma de introducir expresiones en la Ventana de Álgebra activa.
- Vector...  Permite introducir vectores de 100 elementos como máximo.
- Matriz...  Sirve para crear matrices de tamaño máximo 100 × 100.






• Simplificar →

- Normal  Simplifica una expresión devolviendo su valor exacto.
- Expandir... Realiza la expansión algebraica de una expresión.
- Factorizar... Factoriza una expresión.
- Aproximar...  Simplifica una expresión devolviendo un valor aproximado.
- Sustituir Variable...  Permite sustituir una variable por un valor determinado o por una función de otras variables.
- Sustituir Subexpresión... Permite sustituir una o todas las ocurrencias de una subexpresión seleccionada por otra subexpresión.



• Resolver →

- Expresión...  Encuentra la solución algebraica o numérica de una ecuación respecto a una variable seleccionada.
- Sistema... Resuelve un sistema de ecuaciones.

- Cálculo →

<u>L</u> ímites...		Calcula el límite de una función cuando una de sus variables tiende a un determinado valor.
<u>D</u> erivadas...		Calcula la derivada parcial, del orden deseado, de una función respecto a una de sus variables.
<u>P</u> olinomios de <u>T</u> aylor...		Calcula el polinomio de Taylor de una función de una variable en torno a un punto y del grado que se desee.
<u>I</u> ntegrales...		Calcula la integral, definida o indefinida, de una función respecto a una variable.
<u>S</u> umas y <u>S</u> eries...		Realiza la suma de una función respecto a una variable que varía en una unidad desde un valor mínimo hasta uno máximo.
<u>P</u> roductos...		Realiza el producto de una función respecto a una de sus variables que varía en una unidad a partir de un mínimo y hasta un valor máximo.
<u>V</u> ector...		Genera un vector cuyas componentes son el resultado de evaluar una función cuando una de sus variables evoluciona desde un valor inicial hasta un valor final.
<u>T</u> abla...		Genera un tabla formada por dos columnas. La primera presenta los valores de una variable desde un valor inicial hasta uno final. La segunda muestra el resultado de evaluar una función para los valores de la primera columna.



- Definir →

<u>V</u> alor para una <u>V</u> ariable...		Permite asignar un valor o expresión a una variable.
<u>D</u> ominio de una <u>V</u> ariable...		Permite especificar el tipo y el dominio de una variable.
<u>F</u> unción...		Permite definir una función.
<u>P</u> referencias de <u>E</u> ntrada...		Permite escoger si el nombre de las variables puede tener uno o varios caracteres, si las letras mayúsculas y minúsculas son tratadas como iguales o distintas y el sistema de numeración de los datos de entrada.
<u>P</u> referencias de <u>S</u> alida...		Permite escoger el formato de los datos de salida.
<u>P</u> referencias de <u>S</u> implificación...		Permite escoger diferentes modos de trabajo, destacando el poder elegir entre precisión exacta y aproximada. Cuando la precisión está en modo aproximado, el botón  devuelve el mismo valor que  .
<u>R</u> establecer todas las <u>P</u> referencias		Restaura los valores por defecto de los tres menús anteriores.


- Opciones →

<u>Pantalla</u> ►	Permite escoger la alineación de los nuevos objetos, así como las fuentes y el color de los diferentes elementos de las ventanas.
<u>Impresión</u> ►	Da la posibilidad de imprimir el tiempo de cálculo y las anotaciones, así como elegir el tipo de letra. También permite elegir el formato de la página (márgenes, cabecera, pie de página, etc.) y la configuración de la impresora.
<u>Inicio</u>	Permite escoger algunas opciones de inicio de DERIVE. Entre ellas cabe destacar la posibilidad de ejecutar el programa, bien utilizando la configuración original o bien la empleada en la última sesión de trabajo.
<u>Renumerar Expresiones</u>	Renumerar automáticamente las expresiones en orden creciente.
Ocultar <u>Etiquetas</u>	Ocultar/muestra los números de las expresiones en la Ventana de Álgebra activa.
Ocultar <u>Gráficos</u>	Ocultar/muestra los gráficos en la Ventana de Álgebra activa.
Ocultar <u>Texto</u>	Ocultar/muestra texto en la Ventana de Álgebra activa.
Ocultar <u>Objetos OLE</u>	Ocultar/muestra objetos OLE en la Ventana de Álgebra activa.

- Ventana →

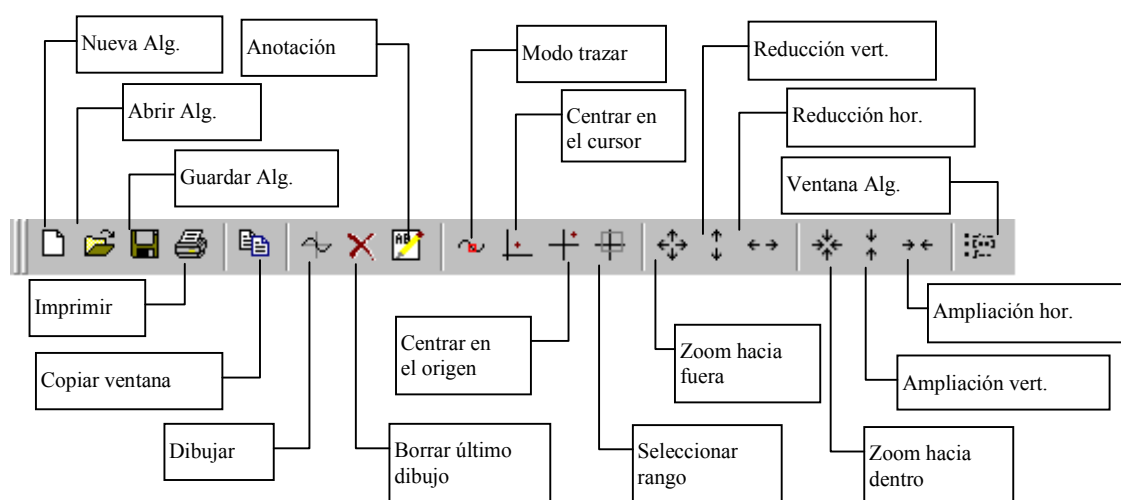
<u>Cascada</u>	Muestra todas las ventanas abiertas en forma de cascada.
<u>Mosaico Horizontal</u>	Muestra todas las ventanas abiertas en forma de mosaico horizontal.
<u>Mosaico Vertical</u>	Muestra todas las ventanas abiertas en forma de mosaico vertical.
<u>Mostrar Pestañas</u>	Muestra todas las ventanas abiertas mediante fichas.
<u>Nueva Ventana 2D</u>	 Abre una nueva Ventana de Gráficas en dos dimensiones. El botón permite abrir una nueva o cambiar a una ya existente.
<u>Nueva Ventana 3D</u>	 Abre una nueva Ventana de Gráficas en tres dimensiones. El botón permite abrir una nueva o cambiar a una ya existente.
<u>Barras de Herramientas</u> ►	Muestra/oculta las distintas barras de herramientas del programa.

- *Ayuda* →

<u>C</u> ontenidos	Muestra el contenido de la ayuda mediante niveles referidos a un mismo tema.
<u>I</u> ndice	Muestra una lista ordenada alfabéticamente de las opciones y de los comandos del programa, permitiendo seleccionar un término de búsqueda.
<u>P</u> reguntas Más <u>F</u> recuentes	Contiene un listado de las preguntas más habituales y sus correspondientes respuestas.
<u>R</u> ecursos <u>A</u> dicionales	Muestra cómo obtener más información acerca del uso de DERIVE.
<u>C</u> onectarse a la <u>P</u> ágina <u>W</u> eb de <u>D</u> erive...	A través de la página Web del programa se pueden obtener versiones trial, actualizaciones, manuales, utilidades, etc.
<u>A</u> cerca de <u>D</u> erive...	 Muestra información sobre el programa.

1.5 Menú de la Ventana de Gráficas 2D

Seguidamente se muestra la barra de órdenes de la Ventana de Gráficas en dos dimensiones, la cual permite ejecutar las siguientes opciones:





A continuación se muestran todas las opciones que aparecen en el menú principal del programa cuando está activa la Ventana de Gráficas 2D.



- Archivo →

<u>I</u> ncrustar	Copia el contenido de la Ventana de Gráficas 2D en la Ventana de Álgebra donde están definidas las expresiones.
<u>A</u> ctualizar	Actualiza, en la Ventana de Álgebra, las gráficas copiadas con la opción anterior.
<u>C</u> errar	Opción similar a la de la Ventana de Álgebra.
<u>E</u> xportar ►	Permite guardar la Ventana de Gráficas 2D como un fichero en formato DIB, JPEG, TARGA o TIFF.
<u>C</u> onfigurar la Página...	Opción similar a la de la Ventana de Álgebra.
Vista <u>P</u> revia	Opción similar a la de la Ventana de Álgebra.
<u>I</u> mprimir...	Opción similar a la de la Ventana de Álgebra.
<u>S</u> alir	Opción similar a la de la Ventana de Álgebra.

- Editar →

<u>A</u> notación...	Permite modificar un comentario ya insertado en el gráfico seleccionándolo previamente (haciendo clic sobre él). También es posible ejecutar esta opción haciendo doble clic sobre el comentario.
<u>B</u> orrar Gráfica ►	 Permite borrar gráficas: la primera, la última, o todas menos la última.
Borrar <u>T</u> odas las Gráficas	Borra todas las gráficas.
Borrar <u>A</u> notación	Borra un comentario previamente seleccionado haciendo clic sobre él.
Borrar <u>T</u> odas las <u>A</u> notaciones	Borra todos los comentarios.
<u>C</u> opiar la Ventana	 Copia el contenido de la ventana al portapapeles.
<u>M</u> arcar y Copiar	Opción similar a la de la Ventana de Álgebra.


- Insertar →

<u>G</u> ráfica	 Dibuja la gráfica de la expresión seleccionada en la Ventana de Álgebra.
<u>A</u> notación	 Permite introducir un comentario que aparecerá en la posición del cursor.

- Seleccionar →

<u>S</u> istema de Coordenadas...	Permite seleccionar el tipo de coordenadas de representación gráfica: rectangulares o polares.
<u>P</u> osición del Cursor...	Permite elegir la posición exacta del cursor.
<u>R</u> egión...	Permite seleccionar la zona y la malla que se desea que aparezca en pantalla.
<u>R</u> ango de la <u>G</u> ráfica...	Opción similar a la anterior.
<u>R</u> elación de <u>A</u> specto...	Permite establecer la relación entre las longitudes relativas de los ejes.

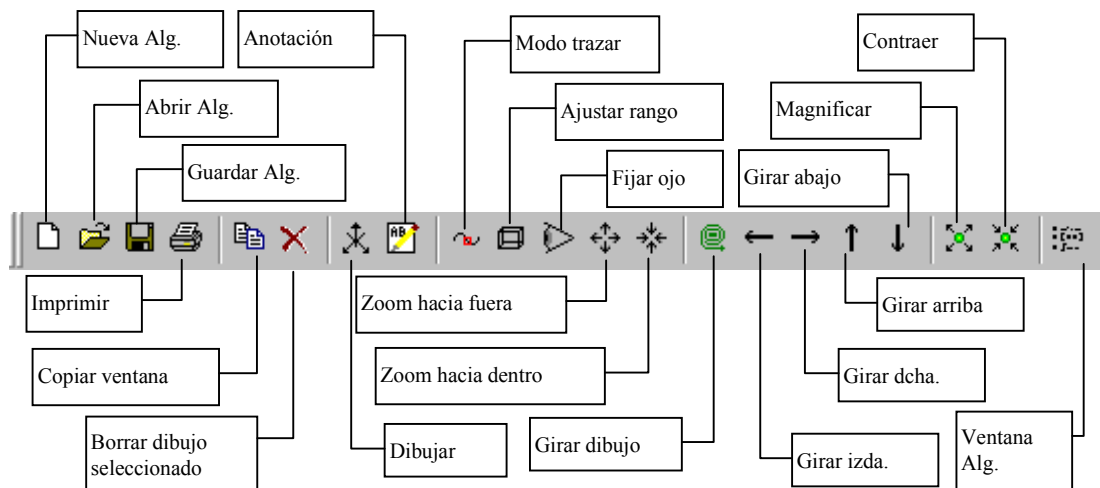
- Opciones →

<u>P</u> antalla ►	Permite visualizar o no los ejes, sus divisiones, el cursor; escoger el nombre de los ejes y determinar el color de los gráficos y del fondo. También es posible definir el formato de la malla. Cuando se dibujan puntos, cabe la posibilidad de determinar su tamaño y de unirlos o no mediante líneas.
<u>I</u> mpresión ►	Permite elegir el formato de la página (márgenes, cabecera, pie de página,...) y la configuración de la impresora. También da la posibilidad de imprimir las gráficas en color o en blanco y negro.
<u>M</u> odo de Trazado	 Cuando se activa, el cursor se convierte en un cuadrado que recorre las gráficas de las funciones. Para ello se usan las siguientes teclas: $\boxed{\rightarrow}$, $\boxed{\leftarrow}$; o $\boxed{\text{Ctrl}} + \boxed{\rightarrow}$, $\boxed{\text{Ctrl}} + \boxed{\leftarrow}$.
<u>P</u> erseguir al <u>C</u> ursor	Cuando está activado, se muestra siempre la parte del gráfico donde está el cursor.
<u>S</u> implificar antes de Dibujar	Permite representar expresiones sin la necesidad de simplificarlas previamente.
<u>A</u> proximar antes de Dibujar	Permite representar expresiones sin la necesidad de aproximarlas previamente.
<u>A</u> uto-Escalar Nuevas Gráficas	Ajusta automáticamente la escala del eje de ordenadas.
<u>C</u> ambio de Color	Permite cambiar el color de la siguiente gráfica.
<u>R</u> epresentar parte Real e Imaginaria	Permite representar funciones complejas: la parte real se dibuja con trazo fino y la parte imaginaria con trazo grueso.

- Ventana → Menú similar al de la Ventana de Álgebra.
- Ayuda → Menú similar al de la Ventana de Álgebra.



1.6 Menú de la Ventana de Gráficas 3D

En primer lugar se presenta la barra de órdenes de la Ventana de Gráficas en tres dimensiones, la cual permite ejecutar las siguientes opciones:





Cuando esta ventana está activa en el menú principal del programa aparecen las siguientes opciones:

- Archivo → Menú similar al de la Ventana de Gráficas 2D.
- Editar → Menú similar al de la Ventana de Gráficas 2D, salvo la opción Gráfica... que permite seleccionar el rango, el color y el número de paneles de la gráfica.
- Insertar → Menú similar al de la Ventana de Gráficas 2D.
- Seleccionar →

<i>Sistema de Coordenadas...</i>		Permite seleccionar el tipo de coordenadas de representación gráfica: rectangulares, esféricas o cilíndricas.
<i>Posición del Ojo...</i>		Permite elegir el punto del espacio desde donde se visualiza el gráfico.
<i>Región...</i>		Opción similar a la de la Ventana de Gráficas 2D.
<i>Rango de la Gráfica...</i>		Opción similar a la de la Ventana de Gráficas 2D.
<i>Relación de Aspecto...</i>		Opción similar a la de la Ventana de Gráficas 2D.

- *Opciones* →

<i>Pantalla</i> ▶		Permite visualizar o no los ejes, la caja y la leyenda. También se puede escoger el color del fondo y establecer los grados que gira la gráfica en cada movimiento, así como el tiempo transcurrido entre dos movimientos consecutivos.
<i>Impresión</i> ▶		Menú similar al de la Ventana de Gráficas 2D.
<i>Modo de Trazado</i>		Cuando está activado, es posible moverse a través de las líneas que delimitan los paneles del gráfico, usando la combinación de teclas: $\boxed{\uparrow} + (\boxed{\rightarrow}, \boxed{\leftarrow}, \boxed{\uparrow} \text{ o } \boxed{\downarrow})$.
<i>Rotar las Gráficas</i>		Activa la rotación continua de las gráficas.
<i>Simplificar antes de Dibujar</i>		Opción similar a la de la Ventana de Gráficas 2D.
<i>Aproximar antes de Dibujar</i>		Opción similar a la de la Ventana de Gráficas 2D.
<i>Auto-Escalar Nuevas Gráficas</i>		Ajusta automáticamente la escala del eje z.
<i>Cambio de Color</i>		Opción similar a la de la Ventana de Gráficas 2D.


- *Ventana* → Menú similar al de la Ventana de Álgebra.

- *Ayuda* → Menú similar al de la Ventana de Álgebra.

2 Álgebra lineal con DERIVE

2.1 Teoría de matrices

- **Definir un vector**

- Editar (Autor) → Vector o el botón .

- $x := [x_1, \dots, x_n]$.

- **Definir un vector a partir de una función**

DERIVE permite crear un vector cuyas componentes son el resultado de evaluar una función, donde una de sus variables sigue una progresión aritmética desde un valor inicial hasta uno final. Existen dos posibilidades:

- Cálculo → Vector. Antes de usar esta opción, la función debe estar seleccionada en la Ventana de Álgebra.

- VECTOR(f, k, m, n, s). En este comando f es la función, k la variable, m el valor inicial, n el valor final y s la razón de la progresión aritmética; es decir, k toma los valores: $m, m + s, m + 2s, \dots \leq n$. Si m y/o s no aparecen, su valor por defecto es 1. Por ejemplo:

VECTOR($k^2, k, 10$) genera el vector $[1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100]$.


VECTOR($k^2, k, 4, 10$) genera el vector $[16, 25, 36, 49, 64, 81, 100]$.

VECTOR($k^2, k, 4, 10, 2$) genera el vector $[16, 36, 64, 100]$.

- **Componente i-ésima de un vector**

- $[x_1, \dots, x_n]$ sub $i \Leftrightarrow [x_1, \dots, x_n] \downarrow i$.

- **Definir una matriz**

- Editar (Autor) → Matriz o el botón .

- $A := [a_{11}, \dots, a_{1n}; a_{21}, \dots, a_{2n}; \dots; a_{m1}, \dots, a_{mn}]$.

- $A := [[a_1, \dots, a_n]]$. Genera matrices con una única fila.

- **Suma matricial**: $A + B$.

- **Producto matricial**

- $A * B \Leftrightarrow AB$.

- Se recuerda que la división matricial no existe. Al escribir A/B , DERIVE calcula $A * B^{-1}$.

- **Potencia n-ésima de una matriz**: A^n .


2.3 Diagonalización de matrices

Dada una matriz cuadrada A ,

- **Polinomio característico de A**

- CHARPOLY(A). Devuelve el polinomio característico de A en potencias de w .

- **Autovalores de A**

- EIGENVALUES(A). Devuelve un vector con los diferentes autovalores de la matriz A pero sin especificar su multiplicidad. Para conocer la multiplicidad de cada autovalor, se calcula el polinomio característico y se factoriza mediante la opción Simplificar \rightarrow Factorizar. Para matrices de orden superior a 4, generalmente DERIVE no puede encontrar los autovalores en forma algebraica (valor exacto); en tal caso, se pueden obtener los autovalores de forma numérica (valor aproximado) utilizando el botón .

- **Autovectores de A**

- EXACT_EIGENVECTOR(A, w). Este comando devuelve el subespacio propio asociado al autovalor w , expresándolo como un vector donde las diferentes variables vienen referidas mediante @1, @2,... Debe utilizarse cuando el autovalor w se ha obtenido de forma algebraica (valor exacto). Para un autovalor obtenido de forma numérica (valor aproximado) devuelve el vector nulo.
 - APPROX_EIGENVECTOR(A, w). Cuando un autovalor no se puede calcular de forma algebraica y se obtiene un valor aproximado, w , de forma numérica, es posible obtener una aproximación a uno de sus autovectores utilizando este comando. Si dicho comando se emplea con un autovalor que se puede obtener de forma algebraica (valor exacto), el resultado no tiene por qué ser un autovector.

2.4 Utilidades creadas con DERIVE

Se pueden crear nuevas utilidades a partir de las ya existentes. En esta sección se presentan algunas utilidades que se pueden encontrar en el disquete que acompaña al libro de Sanz *et al.* (1998). Para su utilización es necesario cargar previamente, mediante la opción Archivo \rightarrow Leer \rightarrow Utilidades, el fichero ALGEBRA.MTH copiado con anterioridad en la carpeta C:\DfW5\Users. Sólo es necesario realizar este proceso una vez en cada fichero de trabajo.

Para ejecutar estas utilidades basta con escribirlas en la línea de edición.

- MAT_CAN($f, [x_1, \dots, x_n]$). Devuelve la matriz asociada a la aplicación lineal f respecto de las bases canónicas, siendo $[x_1, \dots, x_n]$ el vector de variables.

- MAT_AS($f, [x_1, \dots, x_n], B, C$). Devuelve la matriz asociada a la aplicación lineal f respecto de dos bases, siendo $[x_1, \dots, x_n]$ el vector de variables, B la matriz cuyas filas son los vectores de la base del espacio de partida y C la matriz cuyas filas son los vectores de la base del espacio de llegada.
- APL_CAN($A, [x_1, \dots, x_n]$). Devuelve la aplicación lineal cuya matriz asociada respecto de las bases canónicas es A , siendo $[x_1, \dots, x_n]$ el vector de variables de dicha aplicación.
- APL_AS($A, [x_1, \dots, x_n], B, C$). Devuelve la aplicación lineal cuya matriz asociada respecto de dos bases es A , siendo $[x_1, \dots, x_n]$ el vector de variables de dicha aplicación, B la matriz cuyas filas son los vectores de la base del espacio de partida y C la matriz cuyas filas son los vectores de la base del espacio de llegada.
- MAT_SIM($Q, [x_1, \dots, x_n]$). Devuelve la matriz simétrica asociada a la forma cuadrática Q , siendo $[x_1, \dots, x_n]$ el vector de variables.
- MENORES_PRINCIPALES(A). Devuelve un vector cuyos elementos son los menores principales de la matriz A .
- MENORES_PRINCIP_REST(A, B). Devuelve un vector cuyos elementos son los $n - m$ últimos menores principales de la matriz orlada, siendo $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ la matriz de la forma cuadrática y $B \in \mathcal{M}_{m \times n}$ la matriz de restricciones.

3 Cálculo con DERIVE

Derive también permite trabajar en el ámbito del análisis matemático, calculando límites, derivadas, integrales, polinomios de Taylor, etc. A continuación se describen las principales posibilidades en este campo.

3.1 Límites y continuidad

- **Funciones definidas a trozos**

- $f(x) := \text{IF}(\text{condición}, \text{valor1}, \text{valor2})$. La función $f(x)$ queda definida por valor1 cuando se cumple condición , y por valor2 en caso contrario. Por ejemplo:
 $f(x) := \text{IF}(x \geq 0, x, -x)$ define la función valor absoluto ($\text{ABS}(x)$).


- **Composición de funciones**

- $h(x_1, \dots, x_n) := f(g(x_1, \dots, x_n) \downarrow 1, \dots, g(x_1, \dots, x_n) \downarrow m)$. Define la función compuesta, $h = f \circ g$. También se puede utilizar el operador “sub” en lugar de \downarrow .

- **Curvas de nivel de una función**


Es posible generar un vector cuyas componentes son las curvas de nivel de la función $f(x, y)$, de dos formas alternativas:

- Cálculo \rightarrow Vector. Antes de usar esta opción, la ecuación $f(x, y) = k$ debe estar seleccionada en la Ventana de Álgebra; además hay que escoger k como variable.
- $\text{VECTOR}(f(x, y) = k, k, m, n, s)$. Crea un vector cuyas componentes son las curvas de nivel $m, m + s, m + 2s, \dots$, hasta el nivel n .

Antes de dibujar las curvas con el comando PLOT hay que ejecutar  para obtener el vector explícitamente; o bien asegurarnos de que la opción Opciones \rightarrow Simplificar antes de Dibujar está activada en la Ventana de Gráficas 2D.

- **Límite de una función**

Para funciones de una variable se puede calcular el límite de las siguientes formas:


- Escribir la función y seleccionar la opción Cálculo \rightarrow Límites o el botón .
- $\text{LIM}(f, x, x_0)$. Calcula el límite de la función f cuando x tiende a x_0 .
- $\text{LIM}(f, x, x_0, 1)$. Calcula el límite de la función f cuando x tiende a x_0 por la derecha.
- $\text{LIM}(f, x, x_0, -1)$. Calcula el límite de la función f cuando x tiende a x_0 por la izquierda.

Para funciones de dos variables, los límites direccionales se calculan con el siguiente comando:

- $\text{LIM2}(f, x, y, x_0, y_0)$. Calcula el límite direccional cuando $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ a lo largo de líneas rectas de pendiente @1, es decir, a través de cualquier recta que pasa por (x_0, y_0) .

3.2 Cálculo diferencial

- **Derivada de una función**

- Seleccionar la función y escoger la opción *Cálculo* → *Derivadas* o el botón .
- $\text{DIF}(f, x)$. Calcula la derivada de f respecto de la variable x .
- $\text{DIF}(f, x, n)$. Calcula la derivada de orden n de f respecto de la variable x .

Los métodos anteriores nos permiten calcular derivadas parciales de cualquier orden respecto de una misma variable. Si queremos calcular una derivada parcial respecto de dos o más variables, basta con reiterar el proceso el número de veces que sea necesario. Por ejemplo:

$\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}(x, y)$ se obtiene mediante $\text{DIF}(\text{DIF}(f(x, y), x, 3), y, 1)$.

Otro método para calcular derivadas parciales de orden superior a 1, utilizando el comando DIF una sola vez, consiste en escribir, en lugar de una única variable, un vector cuyas componentes son las variables respecto a las cuales se va a derivar. Por ejemplo:

$\frac{\partial^5 f}{\partial x^2 \partial y^3}(x, y, z)$ se obtiene mediante $\text{DIF}(f(x, y, z), [x, y], [2, 3])$.

- **Gradiente de una función**

- $\text{GRAD}(f)$. Calcula el vector gradiente de f respecto de las tres variables x, y, z .
- $\text{GRAD}(f, [x_1, x_2, \dots, x_n])$. Calcula el vector gradiente de f respecto de las variables x_1, x_2, \dots, x_n . Por ejemplo:
 $\text{GRAD}(x^2 + y^2, [x, y])$ devuelve el vector $[2x, 2y]$.

- **Matriz Jacobiana**

- $\text{JACOBIAN}(f, [x_1, x_2, \dots, x_n])$. Devuelve la matriz Jacobiana de la función f respecto de las variables x_1, x_2, \dots, x_n . Conviene destacar que f tiene que ser dada a través de un vector. Por ejemplo:

Si $f(x, y) := x^2 + y^2$, hay que escribir $\text{JACOBIAN}([f(x, y)], [x, y])$.

Si $f(x, y) := [x^2 + y^2, x^2 - y]$, hay que escribir $\text{JACOBIAN}(f(x, y), [x, y])$.

- **Polinomio de Taylor de una función de una variable**

- Escribir la función y seleccionar la opción *Cálculo* → *Polinomios de Taylor*.
- $\text{TAYLOR}(f, x, a, q)$. Calcula el polinomio de Taylor de grado q de la función f en el punto a .

• Derivada de la función implícita


- $\text{IMP_DIF}(f, x, y, n)$. Devuelve la derivada de orden n de la función implícita que se deduce de la ecuación $f = 0$, siendo x la variable independiente e y la dependiente. Este procedimiento sigue siendo válido aún cuando y dependa de más de una variable. Por ejemplo, dada la ecuación $x + y + z + \cos(xyz) - 1 = 0$ que nos define a z como función implícita de x e y , entonces:

$\text{IMP_DIF}(x + y + z + \cos(xyz) - 1, x, z, 1)$ devuelve la derivada de primer orden de z con respecto a x .


$\text{IMP_DIF}(x + y + z + \cos(xyz) - 1, y, z, 2)$ devuelve la derivada de segundo orden de z con respecto a y .

3.3 Cálculo integral

• Integral de una función

- Escribir la función y seleccionar la opción Cálculo \rightarrow Integrales o el botón .
- $\text{INT}(f, x)$. Calcula una primitiva de la función f respecto de la variable x .
- $\text{INT}(f, x, a, b)$. Calcula la integral definida de la función f respecto de la variable x en el intervalo $[a, b]$.

DERIVE también dispone de la siguiente posibilidad gráfica relacionada con la integración:

- $\text{PLOTINT}(f, x, a, b)$. Visualiza el área comprendido entre el eje de abscisas y la gráfica de la función, en el intervalo $[a, b]$. Esta expresión se dibuja directamente si la opción Opciones \rightarrow Simplificar antes de Dibujar está activada en la Ventana de Gráficas 2D. En caso contrario hay que ejecutar  antes de dibujarla.

Las integrales dobles y triples se pueden calcular de alguna de las siguientes formas:

- Reiterando la orden INT el número de veces que sea necesario. Por ejemplo:

$$\int_1^2 \left[\int_0^1 (x^3 + xy^2) dy \right] dx$$
 se obtiene mediante $\text{INT}(\text{INT}(x^3 + xy^2, y, 0, 1), x, 1, 2)$.
- $\text{AREA}(x, x_1, x_2, y, y_1, y_2, f(x, y))$ calcula $\int_{x_1}^{x_2} \left[\int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy \right] dx$.
- $\text{VOLUME}(x, x_1, x_2, y, y_1, y_2, z, z_1, z_2, f(x, y, z))$ calcula $\int_{x_1}^{x_2} \left[\int_{y_1}^{y_2} \left[\int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z) dz \right] dy \right] dx$.

• Función Gamma de Euler

- $\Gamma(p) \Leftrightarrow \text{GAMMA}(p)$ (escrito con mayúsculas).

• Función Beta de Euler

- $\text{EULER_BETA}(p, q)$.

3.4 Utilidades creadas con DERIVE

Para su utilización es necesario cargar previamente, mediante la opción *Archivo* → *Leer* → *Utilidades*, el fichero CALCULO.MTH copiado con anterioridad en la carpeta C:\DfW5\Users. Sólo es necesario realizar este proceso una vez en cada fichero de trabajo.

Para ejecutar las distintas utilidades creadas con DERIVE, basta con escribirlas en la línea de edición:

- HESSIANA($f, [x_1, x_2, \dots, x_n]$). Devuelve la matriz Hessiana de la función f de variables x_1, x_2, \dots, x_n .
- MULTITAYLOR($f, [x_1, x_2, \dots, x_n], [a_1, a_2, \dots, a_n], q$). Calcula el polinomio de Taylor de grado q ($q \leq 2$) de la función f , de variables x_1, x_2, \dots, x_n , en el punto (a_1, a_2, \dots, a_n) .
- IMP_DIF_CRUZ(f, x, y, z). Devuelve $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x, y)$, donde z está definida como función implícita de las variables x e y a partir de la ecuación $f = 0$.

Bibliografía

1. GETAN, J. ET AL. (1994), *Problemas de matemáticas aplicados a la economía y la empresa (Resueltos con ordenador)*. Ed.: Ediciones S.
2. GARCIA, A. ET AL. (1994), *Prácticas de matemáticas con DERIVE*. Ed.: Alfonsa García.
3. GONZALEZ, A. (1995), *Matemáticas con DERIVE en la economía y la empresa*. Ed.: RA-MA.
4. KUTZLER, B. Y KOKOL-VOLJC, V. (2000), *Introducción a DERIVE 5*. Ed.: Kutzler & Kokol-Voljc.
5. PEREZ, C. Y PAULOGORRAN, C. (1998), *Matemática práctica con DERIVE para Windows*. Ed.: RA-MA.
6. SANZ, P. ET AL. (1998), *Problemas de Álgebra lineal. Cuestiones, ejercicios y tratamiento en DERIVE*. Ed.: Prentice Hall Iberia.